

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série avec correction ensembles et application

PROF : ATMANI NAJIB

Application : injective et surjective et bijective

Exercice 1:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |2x + 5|$$

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Soit à présent $g:]1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'expression de sa fonction inverse.

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que l'application $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ est une application bijective.

Exercice 5 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$. L'application f ainsi définie est elle bijective ?

Exercice 6 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?
4. Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.
5. Par deux méthodes différentes, retrouver l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice 7 : (Supplémentaire) Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit g définie comme suit :

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{y_0\}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

1. Comment doit-on choisir le réel x_0 pour que g soit une application ?
2. Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que g soit une application injective ?
3. Comment doit-on choisir a, b, c, d et le réel y_0 pour que g soit une application surjective ?
4. Comment doit-on choisir a, b, c, d, x_0 et y_0 pour que g soit une application bijective ?

Exercice 8 : (Supplémentaire) On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$. Montrer que :

1. $(g \circ f)$ injective $\Rightarrow f$ injective
2. $(g \circ f)$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
3. $((g \circ f)$ et $(h \circ g)$ bijectives) $\Leftrightarrow (f, g$ et h sont bijectives)

Correction : Série avec correction ensembles et application

Corrigé Fiche de TD 2.

Exercice 1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 5.$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Donc f est injective.

2- Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$; Donc f est surjective.

3- f étant injective et surjective f est donc bijective.

Exercice 2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |2x + 5| = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \geq -5/2 \\ -2x - 5 & \text{si } x \leq -5/2 \end{cases}$$

1- Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |2x_1 + 5| = |2x_2 + 5|$.

il y'a 4 cas possibles si $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$ on trouve $x_1 = x_2$.

si $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$ on trouve $x_1 = x_2$.

par contre si $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$ (ou $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$)

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = -2x_2 - 5 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = -10 \Rightarrow x_1 + x_2 = -10/2 = -5.$$

par exemple $x_1 = 0 \geq -5/2$ et $x_2 = -5 \leq -5/2$.

$$f(x_1) = f(0) = 5; \quad f(x_2) = f(-5) = 5 \quad \text{Donc } f(0) = f(-5) \text{ mais } 0 \neq -5$$

Donc f n'est pas injective. (Donc f n'est pas bijective).

2- Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = |2x + 5|$.

si $y < 0$ ($y = -3$ par exemple) l'équation $y = |2x + 5|$ ne possède pas de

solution car $|2x + 5| \geq 0$; Donc f n'est pas surjective (Donc f n'est pas bijective)

Exercice 3:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 1.$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2.$$

par exemple: $x_1 = 2, x_2 = -2$, $f(x_1) = f(x_2) = 3$ mais $x_1 \neq x_2$, Donc f n'est pas injective!

• Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2$.

si $(y + 1 < 0)$ i.e. $(y < -1)$ l'équation $y = x^2 - 1$ ne possède pas de solution, par exemple $y = -3$; $-3 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -2$
 cette équation ne possède pas de solution dans \mathbb{R} . donc f n'est pas surjective.

2- $g: [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$; $g(x) = x^2 - 1$.

• $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$; $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$ ← $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ refusé
 $\Rightarrow x_1 = x_2$ g est injective.

• $y \in [0, +\infty[$; $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y + 1}$.

$y \in [0, +\infty[$ donc $y + 1 > 0$; $x = \pm \sqrt{y + 1}$ on observe que

$y \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y + 1} \geq 1$ donc $\sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$.

Donc $\forall y \in [0, +\infty[$; $\exists x = \sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$; tel que $y = g(x)$. - Donc g surjective.

• g est donc bijective $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y + 1}$.

on accepte $x = +\sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$ et on rejette $x = -\sqrt{y + 1}$.

$y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$ Donc $g^{-1}: [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$
 $x \longmapsto g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$

EXERCICE 4: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$.

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1 + x_1^2} = \frac{2x_2}{1 + x_2^2} \Rightarrow 2x_2(1 + x_1^2) = 2x_1(1 + x_2^2)$
 $\Rightarrow x_2 + x_2x_1^2 = x_1 + x_1x_2^2 \Rightarrow x_2 - x_1 + x_2x_1^2 - x_1x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1) + x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$
 $\Rightarrow (x_2 - x_1)(1 - x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1x_2 = 1$.

En prenant $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ ($x_1x_2 = 1$) on a $f(x_1) = f(x_2) = \frac{4}{5}$ et $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.
 Donc $f(2) = f(\frac{1}{2})$ mais $\frac{1}{2} \neq 2$ donc f n'est pas injective.

2- Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1 + x^2} \Rightarrow y(1 + x^2) = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$.

équation à résoudre en x ; $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$.

si $y > 1$ ou $y < -1$ $\Delta < 0$. pas de solution

Si on prend par exemple $y=3$; $y=f(x) \Rightarrow 3 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0$.

$\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$ donc l'équation $3=f(x)$ ne possède pas de solution x .
 $y=3$ ne possède pas d'antécédent. par f ; donc f n'est pas surjective.

2. $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$; $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

• Soit $x_1, x_2 \in [-1, 1]$; $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 x_2 = 1$.

$x_1 x_2 = 1$ est rejeté car $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$

Si $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} \leq -1$. Le cas limite $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$
 $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$.

Donc $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ donc g injective.

• Soit $y \in [-1, 1]$, $y = g(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$.

$\Delta = 4(1-y^2)$ Comme $y \in [-1, 1]$ $\Delta > 0$

Donc l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$ possède une solution x
 Il reste à vérifier que cette solution x appartient à $[-1, 1]$ (car $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$)

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} , x_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} , x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$$

Si $y=0 \Rightarrow x=0 \in [-1, 1]$.

$x_2 \in [-1, 1]$ $1 + \sqrt{1-y^2} \geq 1$ et $y \in [-1, 1] \Rightarrow x_2 \in [-1, 1]$.

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{(1 - \sqrt{1-y^2})(1 + \sqrt{1-y^2})}{y(1 + \sqrt{1-y^2})} = \frac{1 - (1-y^2)}{y(1 + \sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y^2}}$$

Comme $1 + \sqrt{1-y^2} \geq 1$ et $y \in [-1, 1]$ alors $x_1 \in [-1, 1]$

$\forall y \in [-1, 1]$, $\exists x = x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$, $y = g(x)$ donc g surjective.
 ! si $y=0$, $\exists x=0$ $y = f(x)$

EX5: Il suffit de remarquer par exemple que f n'est pas injective $f(x,y) = f(y,x)$

Donc par exemple $f(2,5) = f(5,2)$ mais $(2,5) \neq (5,2)$ f n'est pas injective donc pas bijective.